

АСПАН МЕХАНИКАСЫ

*Дәріскер
ф.-м.ғ.к., асс.профессор Алимгазина Н.Ш.*

5-дәріс. Аспан денелерінің эфемеридаларын анықтау

3.1 Ұйытқысыз қозғалыстың эфемеридаларын анықтау

Эфемерида дегеніміз - аспан денесінің уақыт бойынша геоцентрлік орналасуы координаттарының жиынтығы.

Аспан сферасында қозғалыстағы денелердің орналасуын аспан экваториалдық координаттары арқылы сипаттауға болады: тік шарықтауымен (α), еңкеюмен (δ). Кеністікте дененің орналасуын анықтау үшін тағы ρ -геоцентрлік арақашықтық қажет.

Екі дене есебінің жалпы шешімі аспан шырақтарының (планеталар, астероидтар және кометалар) ұйытқысыз эфемеридаларын анықтауға мүмкіндік береді.

Мысалы: $p, e, i, \Omega, \omega, \tau$ белгілі кеплер элементерімен ұйытқысыз орбита бойымен Күн айналасында дене қозғалады. Егер $t_1, t_2 \dots t_k$ уақыт мезетінде Күннің X, Y, Z - тікбұрышты геоцентрлік экваториалды координаттары берілсе осы уақыт мезетіндегі дененің p, α, δ сфералық геоцентрлік экваториалды координаттарын анықтау керек. Осы есептің ерекшелігі, бұрыштың кеплер элементтері эклиптикалық координат жүйесіне жатады, ал бізге дененің экваториалдық координаттарын анықтау қажет.

Есептің шешімін табу үшін TM_0M үшбұрышты қарастырамыз (T - Жер, M_0 - Күн, M - аспан денесі орналасу нүктелері).

Сонда

$$\vec{\rho} = \{\rho \cos \delta \cos \alpha, \rho \cos \delta \sin \alpha, \rho \sin \delta\} \quad (3.1)$$

- M дененің геоцентрлік радиус-векторы;

$$\vec{r}_{\text{экв}} = \{x_{\text{экв}}, y_{\text{экв}}, z_{\text{экв}}\}$$

- гелиоцентрлік экваториалдық координат жүйесіндегі M дененің радиус-векторы;

$$\vec{R} = \{X, Y, Z\}$$

- геоцентрлік экваториалды координат жүйесіндегі Күннің радиус-векторы.

Үш вектордың байланысы:

$$\vec{\rho} = \vec{r}_{\text{экв}} + \vec{R}. \quad (3.2)$$

$\vec{r}_{\text{экв}}$ векторды $\vec{r}$ радиус-вектор арқылы анықтауға болады

$$\begin{vmatrix} x_{\text{экв}} \\ y_{\text{экв}} \\ z_{\text{экв}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}, \quad (3.3)$$

ε - экватормен эклиптика жазықтары арасындағы екіжақты бұрыш.

Сонда

$$\begin{vmatrix} x_{\text{эКВ}} \\ y_{\text{эКВ}} \\ z_{\text{эКВ}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{\tau} & A'_{\tau} \\ B_{\tau} & B'_{\tau} \\ C_{\tau} & C'_{\tau} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \end{vmatrix}, \quad (3.4)$$

осында

$$\begin{vmatrix} A_{\tau} & A'_{\tau} \\ B_{\tau} & B'_{\tau} \\ C_{\tau} & C'_{\tau} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{\tau} & \alpha'_{\tau} \\ \beta_{\tau} & \beta'_{\tau} \\ \gamma_{\tau} & \gamma'_{\tau} \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

Бағыттау косинустары $\alpha_{\tau}, \beta_{\tau}, \dots, \gamma'_{\tau}$ және орбиталдық координаттар ξ, η эллипстік қозғалыс теңдеулері арқылы есептелінеді.

Тік шарықтау, еңкею және геоцентрлік арақашықтық төменгі теңдеулер жүйесі арқылы анықталады:

$$\begin{aligned} \rho \cos \delta \cos \alpha &= x_{\text{эКВ}} + X, \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= y_{\text{эКВ}} + Y, \\ \rho \sin \delta &= z_{\text{эКВ}} + Z. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Еңкею $-90^{\circ} \leq \delta \leq 90^{\circ}$, тік шарықтау $[0, 24^h]$ диапазондарында анықталады.

Осындай теңдеулер арқылы Күн жүйесіндегі кіші денелердің эфемеридалары анықталып, арнайы астрономиялық жылнамаларға енгізіледі.

3.2 Эллипстік қозғалысының қатарлары

$$E - e \sin E = n(t - \tau). \quad (3.7)$$

ξ, η - орбиталдық координаттар және r - полярлық радиус

$$\begin{aligned} \xi &= a(\cos E - e), \\ \eta &= a\sqrt{1 - e^2} \sin E, \\ r &= a(1 - e \cos E) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$E - \hat{e} \sin E = \hat{M}.$$

$$e \ll 1.$$

$$E_{n+1} = e \sin E_n + M \quad (3.9)$$

$$|e \sin E| \leq e < 1. \quad (3.10)$$

3.2.1 Кеплер теңдеуінің шешімі

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} E_k e^k \quad (3.11)$$

$$E_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k E(e)}{de^k} \right|_{e=0}. \quad (3.12)$$

$$F(E, e) = E - e \sin E - M = 0. \quad (3.13)$$

$$E = M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}} (\sin^n M). \quad (3.14)$$

Кеплер теңдеуін e және M бойынша дифференциалдаған кезінде

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial e}(1 - e \cos E) - \sin E &= 0, \\ \frac{\partial E}{\partial M}(1 - e \cos E) - 1 &= 0,\end{aligned}\tag{3.15}$$

дербес туындылар үшін тәуелділіктері анықталады

$$\frac{\partial E}{\partial e} = \sin E \frac{\partial E}{\partial M}\tag{3.16}$$

немесе

$$\frac{\partial E}{\partial e} = \frac{\sin E}{1 - e \cos E}.\tag{3.17}$$

Осыдан

$$\begin{aligned}E - e \sin E &= M, \\ 1 - e \cos E &= 0,\end{aligned}$$

сонда

$$e = \frac{1}{\cos E}.\tag{3.18}$$

Осыдан Лагранж қатарларының жинақтылық радиусы

$$e_0 = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + i\sigma_0\right)} = \frac{1}{sh\sigma} = 0.6627.\tag{3.19}$$

Осы теңдеу *Лаплас шегі* деп аталады. Егер $e < e_0$ - Лагранж қатарлары жинақталады; $e \gg e_0$ - қатарлардың таралғыштығы байқалады.

$$E_0 = M, E_1 = \sin M, E_2 = \frac{1}{2} \sin 2M. \quad (3.20)$$

$$E = M + e \sin M + e^2 \frac{1}{2} \sin 2M + \dots. \quad (3.21)$$

3.2.1 Эллипстік қозғалыстың дәрежелік қатарлары

$$\cos E = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^k, \quad \sin E = \sum_{k=0}^{\infty} S_k e^k. \quad (3.22)$$

$$C_k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^{k-1}}{dM^{k-1}} (-\sin^{k+1} M). \quad (3.23)$$

(3.23) формула бойынша бірінші коэффициенттерін анықтаған кезінде

$$\cos E = \cos M + \frac{e}{2}(\cos 2M - 1) + \frac{3}{8}e^2(\cos 3M - \cos M) + \dots \quad (3.24)$$

Кеплер тендеуінен

$$\sin E = \frac{E - M}{e} = \sum_{k=0}^{\infty} E_k e^{k-1} - \frac{M}{e}. \quad (3.25)$$

(3.22) және (3.25) салыстырған кезінде

$$S_k = E_{k+1}. \quad (3.26)$$

Егер кейінгі қатарлардың коэффициенттерін E_k - негізгі қатардың коэффициенттері арқылы және C_k қатарларын эксцентрлік аномалиямен оның косинустары арқылы жазылса, сонда орбита тендеулері

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos E. \quad (3.27)$$

Негізгі қатарлардың коэффициенттерінің өлшемі болмайды, сондықтан барлық шамаларды өлшемі жоқ түріне келтіріледі. (3.27) формула қатар ретінде жазылады

$$\frac{r}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} R_k e^k, \quad (3.28)$$

осында

$$R_k = C_{k-1} \quad (k \neq 0), \quad R_0 = 1. \quad (3.29)$$

Өлшемсіз орбиталдық координаттардың теңдеулері

$$\frac{\xi}{a} = \cos E - e, \quad \frac{\eta}{a} = \sqrt{1-e^2} \sin E \quad (3.30)$$

және олардың дәрежелік қатарлары

$$\frac{\xi}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} \Xi_k e^k, \quad \frac{\eta}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} H_k e^k. \quad (3.31)$$

Осында

$$\Xi_k = C_k \quad k \neq 1, \quad \Xi_1 = C_1 - 1$$

және

$$H_k = \sum_{s=0}^k \alpha_s S_{k-s} = \sum_{s=0}^k \alpha_s E_{k-s+1} \left(\alpha_0, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_{2j} = (-1)^j \frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}, \alpha_{2j+1} = 0 \right).$$

Бастапқы координат жүйесінің координаттарының қатарлары

$$\frac{x}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} X_k e^k, \quad \frac{y}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k e^k, \quad \frac{z}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k e^k \quad (3.32)$$

және орбиталдық координаттарымен байланысы

$$\begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot \Xi_k + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot H_k. \quad (3.33)$$

Өлшемсіз жылдамдықтың қатарын анықтау үшін энергия интегралы қолданылады

$$\left(\frac{V}{na} \right)^2 = 2 \cdot \frac{a}{r} - 1. \quad (3.34)$$

M бойынша Кеплер теңдеуі дифференциалдағанда

$$\frac{dE}{dM} = \frac{1}{1 - e \cos E} = \frac{a}{r} \quad (3.35)$$

кері арақашықтық қатарының коэффициенттері анықталады. Кері арақашықтық қатары

$$\frac{a}{r} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{R}_k e^k, \quad \tilde{R}_k = \frac{dE_k}{dM}. \quad (3.36)$$

(3.34) теңдеуді қатар арқылы жазғанда

$$\left(\frac{V}{na}\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} V_k^{(2)} e^k, \quad (3.37)$$

қатардың коэффициенттері

$$V_k^{(2)} = 2\tilde{R}_k \quad (k \neq 0), \quad V_0^{(2)} = 1. \quad (3.38)$$

Сонда

$$\frac{V_n}{na} = \frac{r \dot{v}}{na} = \frac{\sqrt{\mu p}}{nar} = \frac{a}{r} \cdot \sqrt{1 - e^2}, \quad (3.39)$$

және

$$\frac{\dot{v}}{n} = \frac{V_n}{nr} = \frac{a}{r} \cdot \frac{V_n}{na}. \quad (3.40)$$

теңдеулерді қолданып, қатарларды өзара бір-біріне көбейтіп, уақыт бойынша көбейтіндінің интегралын анықтау арқылы шын аномалияның қатары табылады

$$v = \sum_k^{\infty} v_k e^k. \quad (3.41)$$

Бұл теңдеу – *центр теңдеуі* деп аталады. Осы қатардың бірінші құраушылары

$$v = M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \dots. \quad (3.42)$$

3.2.1 Эллипстік қозғалыстың тригонометриялық қатарлары

$0 < e < 1$ болған жағдайда тригонометриялық қатарларды жазуға болады, сонда M - орташа аномалия бойынша Фурье қатарлары алынады. Эллипстік қозғалыс кезінде эксцентрілік аномалия және оған тәуелді сипаттамалар, орташа аномалияға тәуелді периодтық функциялар болады.

2π периоды бар жұп периодты функциялар үшін Фурье қатары:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad (3.43)$$

осында Фурье коэффициенттері

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx. \quad (3.44)$$

Тақ функциялар үшін

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad (3.45)$$

осында Фурье коэффициенттері

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx. \quad (3.46)$$

Эксцентрілік аномалія және оның косинусы үшін негізгі қатарларының Фурье коэффициенттерін анықтауға болады. $E - M$ шамасы үшін

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (E - M) \sin kM dM. \quad (3.47)$$

(3.47) теңдеуін E айнымалы шамасы бойынша бөліп интегралдау арқылы Фурье қатарының коэффициенттері анықталады

$$b_k = \frac{2}{k\pi} \left[-(E - M) \cos kM \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos kM (dE - dM) \right] = \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos(kE - ke \sin E) dM, \quad (3.48)$$

$$a_k = \frac{1}{k} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)]. \quad (3.49)$$

Бессель функциясын $J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (k\varphi - x \sin \varphi) d\varphi$ қолданған кезінде

$$b_k = \frac{2}{k\pi} J_k(ke), \quad (3.50)$$

$$a_k = \frac{1}{k} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)]. \quad (3.51)$$

Фурье қатары эксцентрілік аномалия және оның косинусы үшін төменгі теңдеулерімен анықталады

$$E = M + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ke) \sin kM, \quad (3.52)$$

$$\cos E = -\frac{e}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)] \cos kM. \quad (3.53)$$

Енді эллипстік қозғалыстың басқа сипаттамалары үшін Фурье қатарлары

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} &= 1 + \frac{e^2}{2} - e \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)] \cos kM, \\ \frac{\xi}{a} &= -\frac{3}{2}e + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)] \cos kM, \\ \frac{\eta}{a} &= \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ke) \sin kM. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Бессель функциясы абсолютті жинақтылық дәрежелік қатарларына жіктеледі

$$J_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2j}}{k!(k+j)!} \quad (3.55)$$

Егер $(x = ke)$ (3.55) теңдеуін (3.52), (3.53) және (3.54) теңдеулеріне енгізгенде, эксцентриситет дәрежесі бойынша тригонометриялық қатарларын алуға болады.